**Работа №11**

# ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

В цепи, содержащей катушку индуктивности и конденсатор, могут возникать электрические колебания. В работе изучаются вынужденные электромагнитные колебания в контуре, состоящем из последовательно соединенных емкости *C*, индуктивности *L* и сопротивления *R* (рис.1). Вынужденные колебания возбуждаются внешним периодически изменяющимся воздействием. В электрическом контуре это достигается подключением контура к источнику переменного напряжения.

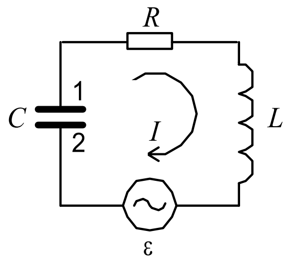

Рис. 1.

Составим уравнение, описывающее вынужденные колебания. Будем считать, что процессы в контуре квазистационарные, то есть мгновенное значение силы тока одно и то же в любом сечении контура. Это допущение справедливо для цепей, в которых время распространения электромагнитного возмущения $\tau = l/c$ ($l$ – длина цепи, $c$ – скорость электромагнитных волн) пренебрежимо мало по сравнению с периодом колебаний тока и напряжения. К мгновенным значениям квазистационарных токов и напряжений можно применять закон Ома, установленный для постоянных токов.

Пусть ток $I$ на рис. 1 заряжает конденсатор. Тогда заряд $q$ на обкладке 2 увеличивается ($dq > 0$), и ток в контуре определяется, как

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (1)$$

Согласно закону Ома для неоднородного участка цепи 1–R–L–2

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_s + \varepsilon, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_s$ – э. д. с. самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}, \tag{3}$$

а разность потенциалов между точками 1 и 2 определяется зарядом и емкостью конденсатора:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}, \tag{4}$$

причем знак минус в (4) возникает из-за того, что поле в конденсаторе направлено от обкладки 2 к обкладке 1. Тогда уравнение (2) можно переписать в виде

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon, \tag{5}$$

или, с учетом (1), как

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \varepsilon. \tag{6}$$

Линейное дифференциальное неоднородное уравнение (6) с постоянными коэффициентами является уравнением колебательного контура. Это уравнение обычно записывается в виде

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \varepsilon / L, \tag{7}$$

где введены обозначения

$$2\beta = R/L, \quad \omega_0^2 = 1/LC. \tag{8}$$

Величину $\omega_0$ называют собственной частотой контура, а $\beta$ – коэффициентом затухания.

Решение линейного дифференциального уравнения (7) с правой частью состоит из общего решения однородного уравнения и какого-нибудь частного решения уравнения с правой частью.

При малом затухании ($\beta < \omega_0$) общее решение однородного уравнения имеет вид

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha), \tag{9}$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \tag{10}$$

а $q_0$ и $\alpha$ – постоянные, определяемые начальными значениями заряда и тока. Как видно из (9), при ненулевом коэффициенте затухания амплитуда колебаний экспоненциально убывает со временем. Вместо величины $\beta$ затухание, обычно, характеризуется логарифмическим декрементом, определяемым, как логарифм отношения двух амплитудных значений заряда $q_n$ и $q_{n+1}$, разделенных периодом:

$$\lambda = \ln\frac{q_n}{q_{n+1}} = \ln\frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \tag{11}$$

Пусть э. д. с. ε изменяется по гармоническому закону:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos\omega t. \tag{12}$$

Для нахождения решения уравнения (7) с правой частью вида (12) представим ее в комплексном виде:

$$\widehat{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}. \tag{13}$$

Воспользуемся тем, что если некоторая комплексная функция является решением линейного дифференциального уравнения с вещественными коэффициентами и комплексной правой частью, то вещественная часть этой функции является решением того же уравнения, в правой части которого стоит вещественная часть прежнего выражения. Перепишем (7) с учетом (13):

$$\ddot{\widehat{q}} + 2\beta\dot{\widehat{q}} + \omega_0^2\widehat{q} = \frac{\varepsilon_0}{L} e^{i\omega t}. \tag{14}$$

Будем искать решение уравнения (14) в виде

$$\widehat{q}(t) = \widehat{q}_0 e^{i\omega t}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14) и сокращая на $e^{i\omega t}$, найдем

$$\widehat{q}_0\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + i\cdot 2\beta\omega\right] = \varepsilon_0 / L. \tag{16}$$

Перепишем (16), представив комплексное выражение, заключенное в квадратные скобки, в показательной форме:

$$\widehat{q}_0\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}\cdot e^{i\psi} = \varepsilon_0 / L, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}\psi &= arctg\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} + arctg\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega}\right) = \frac{\pi}{2} + arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Разрешим уравнение (17) относительно $\hat{q}_0$:

$$\hat{q}_0 = \frac{\varepsilon_0 / L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} e^{-i\psi}. \tag{19}$$

Подставим полученное решение в (15) и возьмем действительную часть:

$$\begin{aligned} q(t) &= \mathrm{Re}\left\{ \frac{\varepsilon_0 / L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} e^{-i\psi} \cdot e^{i\omega t} \right\} = \\ &= \frac{\varepsilon_0 / L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \psi) = q_0 \cos(\omega t - \psi). \end{aligned} \tag{20}$$

Сравнивая (20) с (12) видим, что изменение заряда на конденсаторе (а вместе с ним и напряжение) отстает от изменения э. д. с. на угол $\psi$, определяемый (18).

Дифференцируя (20), найдем выражение для тока:

$$\begin{aligned} I(t) &= -\frac{\varepsilon_0 / L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - \psi) = \\ &= \frac{\varepsilon_0 / L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \psi\right) = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0 \omega / L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{22}$$

– амплитудное значение тока, а

$$\varphi = arctg\left( \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \right) \tag{23}$$

– сдвиг фаз между током и э. д. с., изменяющейся по закону (12).

Как видно из (22), амплитуда силы тока имеет максимальное значение при ($\omega L$-1/$\omega C$)=0. Резкое возрастание силы тока при приближении частоты внешнего напряжения $\omega$ к собственной частоте колебательного контура $\omega_0$. называется резонансом, а соответствующая частота – резонансной. Максимум при резонансе оказывается тем выше и острее, чем меньше коэффициент затухания $\beta$. Вид резонансных кривых для нескольких значений коэффициента затухания приведен на рис. 2.

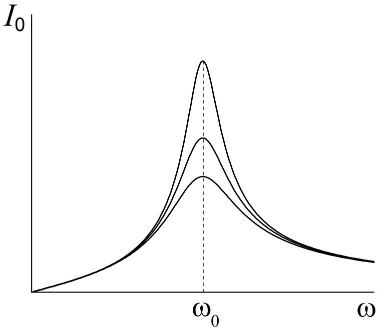


Рис. 2.

Зависимость сдвига фаз (23) между током в контуре и внешней э. д. с. вблизи резонансной частоты показана на рис. 3.

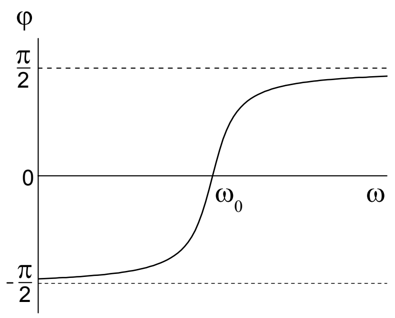


Рис. 3.

Колебательный контур принято характеризовать величиной $Q$, называемой добротностью контура:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}, \qquad (24)$$

где $\lambda$- логарифмический декремент затухания (11).

Добротность пропорциональна числу колебаний, совершаемых системой за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e$ раз и характеризует остроту резонансной кривой.

Получим ряд соотношений, связывающих добротность с параметрами контура и формой резонансной кривой. Пользуясь определением добротности (24) и выражением для логарифмического декремента затухания (11), запишем

$$Q = \frac{\pi}{\beta T}. \qquad (25)$$

Если затухание в контуре мало ($\beta^2 << \omega_0^2$), то из (10) следует, что $T \approx 2\pi / \omega_0$ и, с учетом (8), добротность можно записать, как

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (26)$$

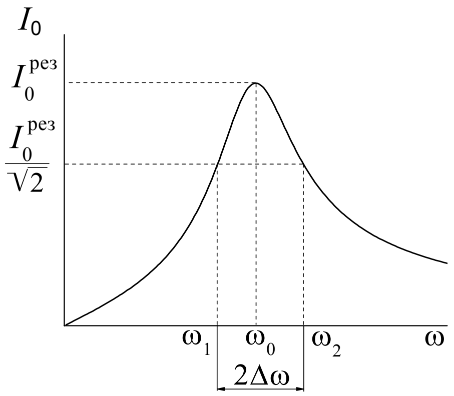


Рис. 4.

В этом же приближении добротность оказывается равной отношению резонансной частоты контура $\omega_{рез}$ к ширине резонансной кривой $2\Delta\omega$, взятой на высоте, соответствующей амплитуде в $\sqrt{2}$ меньше, чем при резонансе (рис.4):

$$Q = \frac{\omega_{рез}}{2\Delta\omega}. \qquad (27)$$

Выражение (27) можно получить следующим образом. Из формулы (22) следует, что значение амплитуды тока при резонансе равно

$$I_0^{рез}(\omega_0) = \frac{\varepsilon_0}{R}, \qquad (28)$$

а амплитуда тока при частоте $\omega_1$

$$I_0(\omega_1) = \frac{\varepsilon_0}{R\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C})^2}}. \qquad (29)$$

Составим отношение этих амплитуд и приравняем его $\sqrt{2}$ :

$$\frac{I_0^{рез}(\omega_0)}{I_0(\omega_1)} = \sqrt{1 + \frac{1}{R^2}(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C})^2} = \sqrt{2}\,. \qquad (30)$$

Возведя (30) в квадрат, получим после преобразований с использованием (26)

$$Q = \frac{\omega_1 \omega_0}{\omega_1^2 - \omega_0^2}\,. \qquad (31)$$

В случае контура с малым затуханием и, следовательно, с узким максимумом резонансной кривой можно приближенно принять

$$\omega_1 \approx \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_0) \qquad (32)$$

и тогда формула (31) преобразуется к виду (27).

**Описание установки**

Принципиальная схема используемой в работе установки приведена на рис. 5, а структурная схема – на рис. 6. Установка состоит из кассеты ФПЭ-11, магазина сопротивлений, магазина емкостей, генератора сигналов ГЗ-106 и осциллографа HM400. В кассете заключены индуктивность $L$=0.1 Гн и постоянное сопротивление $R_1$=75 Ом; на передней панели кассеты находятся гнезда для подключения магазина сопротивлений ($R$) и магазина емкостей ($C$). В собранном состоянии эти элементы образуют колебательный контур, емкость и сопротивление которого можно изменять. Внешнее напряжение, изменяющееся по гармоническому закону, подается на клеммы PQ кассеты от генератора ГЗ-106. Клеммы $X$ и $Y$ на панели кассеты соединяются соответственно с клеммами CH1 и CH 2 на входе осциллографа. Таким образом, как видно из принципиальной схемы, на один из каналов осциллографа ($Y_1$) подается напряжение внешнего ис-

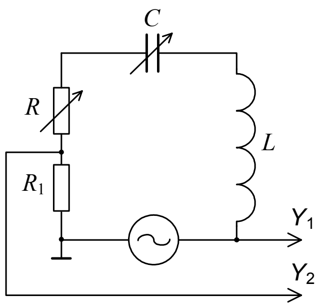


Рис.5.

точника (генератора), а на другой ($Y_2$) – падение напряжения на сопротивлении $R_1$, пропорциональное току в контуре.

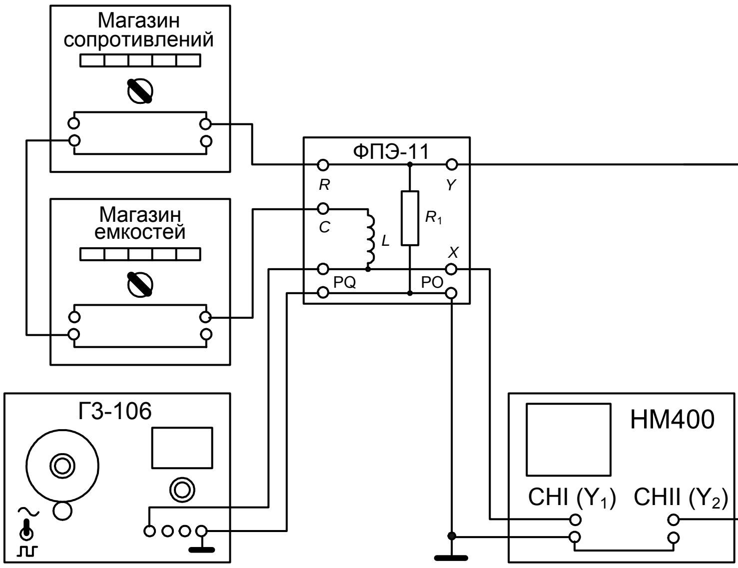


Рис. 6.

## Выполнение работы

**Упражнение 1. Изучение зависимости амплитуды тока в колебательном контуре от частоты внешнего напряжения (получение резонансной амплитудной кривой для тока).**

1) Приняв значение $L$ = 0.1 Гн и установив величину емкости $C$ в пределах 0.1 – 1.0 нФ ( по указанию преподавателя), оценить собственную частоту $\nu_0$ колебательного контура по формуле

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

2) Установить частоту выходного напряжения генератора, близкой к $\nu_0$; напряжение на выходе ~1 В поддерживать постоянным при выполнении всего упражнения.
3) Переключатель магазина сопротивлений установить в положение, соответствующее $R = 0$.
4) Установить на осциллографе режим работы CH2.
5) Подключить сигнал с сопротивления $R_1$ (выход $Y$ на кассете ФПЭ-11) на вход канала CHII осциллографа (см. рис. 6) и получить на экране изображение кривой $I(t)$ в контуре при частоте, близкой к $\nu_0$.
6) Определить амплитуду тока в контуре. Для этого измерить амплитуду $A_0$ синусоиды на экране в делениях шкалы. Затем вычислить амплитуду тока в контуре по формуле

$$I_0 = \frac{U_0}{R_1} = \frac{\hat{E}_y A_0}{R_1},$$

где $K_y$ – масштабный множитель шкалы канала 2 в вольт/дел; $A_0$ – амплитуда синусоиды в больших делениях шкалы.
7) Снять зависимость $I_0(\nu)$. Для этого повторить определение амплитуд $I_0$ при различных частотах выходного напряжения генератора. Частоту генератора изменять вблизи $\nu_0$ в диапазоне, достаточном для получения резонансной кривой.
8) Снять резонансные кривые ещё при двух значениях сопротивления контура. Сопротивление $R$ магазина сопротивлений установить по указанию преподавателя.
9) Построить на одном чертеже резонансные кривые, соответствующие разным значениям сопротивления контура.
10) По графику $I_0(\nu)$, полученному для контура с малым затуханием (R=0), определить добротность $Q$, пользуясь формулой (27).
11) Вычислить значение добротности по формуле (26), полагая $R = R_1$. Сравнить полученные значения.

**Упражнение 2. Изучение зависимости сдвига фаз между током и внешним напряжением от частоты внешнего напряжения (получение резонансных фазовых кривых).**

1) Установить на осциллографе режим работы DUAL.

2) Подключить сигнал внешнего источника (генератора) с выхода $X$ кассеты ФПЭ-11 на вход CHI осциллографа, а с сопротивления $R_1$ (выход $Y$ на кассете) на вход канала CHII осциллографа (см. рис. 6).
3) Получить устойчивое изображение двух синусоид и совместить их горизонтальные оси.
4) Определить временной сдвиг $\Delta t$ между синусоидами (см. рис. 7) и определить сдвиг фаз $\varphi=2\pi\nu\Delta t$ между напряжением источника и током в контуре для различных частот $\nu$ вблизи резонанса в интервале, необходимом для построения резонансной кривой. Построить график $\varphi(\nu)$.

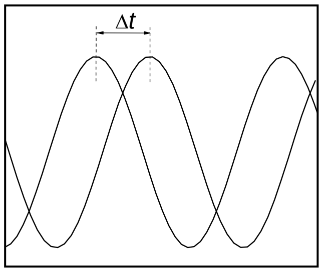

Рис. 7.

5) Построить на той же координатной сетке график $\varphi(\nu)$, используя формулу (23). Значения параметров контура взять те, при которых снималась экспериментальная кривая.

## Контрольные вопросы

1. Получить и решить дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в контуре, содержащем последовательно соединенные емкость $C$, индуктивность $L$ и омическое сопротивление $R$.
2. С какой частотой происходят вынужденные колебания? Чем определяются амплитуда и фаза вынужденных колебаний в установившемся режиме?
3. В чем заключается явление резонанса? При какой частоте внешнего напряжения амплитуда тока в контуре достигает максимального значения?
4. Как зависит вид резонансных кривых от величины активного сопротивления контура?
5. Что такое добротность контура? Выразить добротность контура с малым затуханием через параметры контура и через параметры резонансной кривой.